Iterazione di De Giorgi e stime L^∞

1. Il teorema principale

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \ , \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}|\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

Proof. Dimostrereremo il teorema in dimensione $d \ge 3$.

Supporremo inoltre che $f \ge 0$ e che di conseguenza anche $u \ge 0$ su Ω.

Fissiamo ora $t > 0$ e consideriamo la funzione test

$$u \wedge t \ .$$

Allora, l'ottimalità di u implica

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx - \int uf(x)\,dx \le \frac{1}{2}\int |\nabla(u\wedge t)|^2\,dx - \int (u\wedge t)f(x)\,dx$$

che possiamo scrivere come

$$\frac{1}{2}\int |\nabla (u-t)_+|^2\,dx \le \int (u-t)_+ f(x)\,dx.$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}\int (u-t)_+ f(x)\,dx &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}}\\ &\le \|f\|_{L^p}\left(\int (u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{2d}}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}} \ ,\end{aligned}$$

dove

$$\Omega_t = \{u > t\}.$$

D'altra parte

$$C_d\int |\nabla(u-t)_+|^2\,dx \ge \left(\int_{\Omega_t}(u-t)_+^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}}.$$

Di conseguenza,

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \le C_d\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

Fissando

$$T > t \qquad \text{e} \qquad \Omega_T = \{u > T\} \ ,$$

abbiamo che

$$\|(u-t)_+\|_{L^{2^*}} \ge (T-t)|\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}}$$

e quindi

$$(T-t)|\Omega_T|^{\frac{d-2}{2d}} \le C_d\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

Consideriamo le successioni

$$t_n = \big(1-2^{-n}\big)T \qquad \text{e} \qquad M_n = |\Omega_{t_n}|$$

Di conseguenza,

$$T2^{-n}M_{n+1}^{\frac{d-2}{2d}} \le C_d\|f\|_{L^p}M_n^{\frac{2p-d}{dp}+\frac{d-2}{2d}}.$$

che scriviamo come

$$M_{n+1} \le \frac{C_d\|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}}\left(2^{\frac{2d}{d-2}}\right)^n M_n^{1+\varepsilon},$$

dove la costante $\varepsilon > 0$ è definita come

$$\varepsilon = \frac{2p-d}{pd}\frac{2d}{d-2} > 0.$$

Ora, scegliendo T tale che

$$\frac{C_d\|f\|_{L^p}^{\frac{2d}{d-2}}}{T^{\frac{2d}{d-2}}} = \left(2^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{-1/\varepsilon}|\Omega|^{-\varepsilon},$$

abbiamo che (vedi Lemma 3)

$$|\Omega_T| = \lim_{n\to\infty} M_n = 0$$

il che conclude la dimostrazione. □

Esercizio 2. *Dimostrare il teorema precedente in dimensione $d = 2$.*

Lemma 3. *Siano $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $b > 1$ e K delle costanti positive e sia M_n una successione (di numeri reali positivi) tale che*

$$M_0 = K \qquad e \qquad M_{n+1} \le Cb^n M_n^{1+\varepsilon}.$$

Se

$$C \le \frac{1}{b^{1/\varepsilon}K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Proof. Dimostreremo per induzione che

$$M_n \le Ka^{-n},$$

dove $a > 1$ è una costante che sceglieremo in seguito. Osserviamo che

$$M_{n+1} \le Cb^n M_n^{1+\varepsilon} \le Cb^n\left(Ka^{-n}\right)^{1+\varepsilon}$$

Per dimostrare il passo induttivo, bisogna scegliere a in modo tale che

$$Cb^n\left(Ka^{-n}\right)^{1+\varepsilon} \le Ka^{-n-1},$$

ovvero tale che

$$C\left(ba^{-\varepsilon}\right)^n \le \frac{1}{aK^\varepsilon}.$$

Scegliendo

$$a := b^{1/\varepsilon},$$

otteniamo che se

$$C \le \frac{1}{b^{1/\varepsilon}K^\varepsilon},$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0. \quad \square$$

2. Operatori a coefficienti variabili

Sia Ω un aperto di misura finita su $\mathbb{R}^d$ e sia

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica a coefficienti variabili

$$a_{ij} \equiv a_{ji} \,:\, \Omega \to \mathbb{R}$$

(Lebesgue) misurabili su Ω e tale che

$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

dove $0 < c \le C$ sono due costanti e dove ricordiamo la seguente definizione

Definizione. Date due matrici $d\times d$ simmetriche ed a coefficienti reali M ed N, diciamo che $M \le N$ se

$$v^t M v \le v^t N v \quad \text{per ogni vettore} \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

Diremo che $u \in H_0^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega \ , \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega \nabla u\, A(x)\big[\nabla v\big]^t\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Osservazione 4. *La soluzione debole del problema*

$$\int_\Omega \nabla u\, A(x)\big[\nabla v\big]^t\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

esiste ed è unica. Inoltre, $u \in H_0^1(\Omega)$ è anche l'unica soluzione del problema variazionale

$$\min\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u\, A(x)\big[\nabla u\big]^t\,dx - \int_\Omega f(x)u\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in H_0^1(\Omega)\Big\}.$$

Teorema 5. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > \frac{d}{2}$, ed A una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω tale che*

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

dove $0 < \ell \le L$ sono costanti. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad \Omega \ , \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le \frac{C_{d,p}}{\ell}\|f\|_{L^p}|\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

3. Stime $L^1 - L^\infty$ e $L^2 - L^\infty$

Osservazione 6. *Nelle ipotesi del teorema precedente, abbiamo che per ogni $t > 0$*

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le \frac{C_{d,p}}{\ell}\|f\|_{L^p}|\Omega_t|^{\frac{2p-d}{pd}},$$

dove

$$\Omega_t = \{u > t\}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|(u-t)_+\|_{L^\infty} \le \frac{C_d}{\ell}\|f\|_{L^\infty}|\Omega_t|^{\frac{2}{d}}.$$

Proposizione 7. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > \frac{d}{2}$, ed A una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω tale che*

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

dove $0 < \ell \le L$ sono costanti. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad \Omega \ , \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p,\ell}\|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{(d+2)p-d}}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2p-d}{(d+2)p-d}}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,\ell}\|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+2}}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{2}{d+2}}.$$

Proof. Sia

$$M = \sup_{x\in\Omega} u(x).$$

Allora, per ogni $t \in (0, M)$ abbiamo

$$M - t \le C|\Omega_t|^{2/d - 1/p} \qquad \text{dove} \qquad C = \frac{C_{d,p}}{\ell}\|f\|_{L^p} \qquad \text{e} \qquad \Omega_t = \{u > t\}.$$

Di conseguenza

$$(M-t)^{\frac{pd}{2p-d}} \le C^{\frac{pd}{2p-d}}|\Omega_t|$$

e integrando per $t \in (0, M)$ otteniamo

$$\frac{M^{1+\frac{pd}{2p-d}}}{1+\frac{pd}{2p-d}} = \int_0^M (M-t)^{\frac{pd}{2p-d}}\, dt \le C^{\frac{pd}{2p-d}} \int_\Omega u_+ \le C^{\frac{pd}{2p-d}} \|u\|_{L^1(\Omega)},$$

il che conclude la dimostrazione. □

Proposizione 8. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > \frac{d}{2}$, ed A una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω tale che*

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in \Omega,$$

dove $0 < \ell \le L$ sono costanti. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \textit{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p,\ell} \|f\|_{L^p}^{\frac{pd}{4p-2d+pd}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4p-2d}{4p-2d+pd}}.$$

In particolare, quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,\ell} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}}.$$

Una stima L^∞ per le autofunzioni del Laplaciano con condizioni di Dirichlet

In questa sezione dimostrereremo il teorema seguente.

Teorema 9. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \textit{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H_0^1(\Omega)\ , \qquad \int_\Omega u^2\, dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Limitatezza delle autofunzioni. Siano $p > d/2$ e Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Sia

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to \Omega$$

l'operatore risolvente del laplaciano. Allora,

$$\|R_\Omega(f)\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{L^p}, \quad \text{per ogni} \quad f \in L^p(\Omega).$$

e quindi R_Ω può essere esteso ad un operatore lineare continuo

$$R_\Omega : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$

con norma che dipende solo dalla dimensione d e la misura $|\Omega|$.

- Se $d \le 3$, allora prendendo $p = 2$, abbiamo che $d/2 < p = 2$ e quindi
$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$$
è un operatore limitato per $d = 1, 2, 3$. Siccome u è soluzione di
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega$$
e $u \in L^2$, abbiamo che $u \in L^\infty$.
- Supponiamo ora che $d \ge 4$. Per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev abbiamo che
$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$$
è un operatore limitato dove $2^* = \dfrac{2d}{d-2}$.
- Se la dimensione d è 4 oppure 5, allora per
$$2^* = \frac{2d}{d-2} \ge \frac{d}{2}$$
e quindi la composizione
$$R_\Omega^2 := R_\Omega \circ R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$
può essere estesa ad un operatore continuo e limitato
$$R_\Omega^2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Lemma 10. *Sia $R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore risolvente associato al Laplaciano con condizioni di Dirichlet su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita. Allora esiste una costante N che dipende solo dalla dimensione d tale che la composizione*

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

può essere estesa ad un operatore limitato

$$R_\Omega^N : L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega).$$

Proof. Possiamo supporre che $d \geq 6$. Sappiamo che R_Ω è un operatore continuo:

$$R_\Omega : L^2 \to L^{2^*} \qquad \text{e} \qquad R_\Omega : L^d \to L^\infty .$$

Teorema si Riesz-Thorin. Sia T un operatore continuo

$$T : L^{p_0} \to L^{q_0} \qquad \text{e} \qquad T : L^{p_1} \to L^{q_1} .$$

Allora, per ogni $\theta \in (0,1)$, l'operatore

$$T : L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}$$

è continuo, dove p_θ e q_θ sono tali che

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} .$$

Di conseguenza, per ogni

$$p \in \big[2, {}^d\!/_2\big],$$

l'operatore

$$R_\Omega : L^p \to L^q \qquad \text{dove} \qquad q := p\left(1 + \frac{p}{d-p}\right),$$

è limitato. Siccome Ω ha misura finita e

$$\frac{p}{d-p} \geq \frac{4}{d} ,$$

anche l'operatore

$$R_\Omega : L^p \to L^{p+8/d}.$$

è limitato. Di conseguenza, esiste n tale che

$$R_\Omega^n : L^{2^*} \to L^p$$

è limitato dove

$$p := \frac{2d}{d-2} + \frac{8n}{d} > \frac{d}{2}.$$

In conclusione,

$$R_\Omega : L^2 \to L^{2^*} , \qquad R_\Omega^n : L^{2^*} \to L^p , \qquad R_\Omega : L^p \to L^\infty$$

sono operatori limitati e quindi anche la composizione

$$R_\Omega^{n+2} : L^2 \to L^\infty$$

è un operatore limitato. □

Dimostrazione di Teorema 9. Sappiamo che la soluzione u del problema

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega , \qquad u \in H_0^1(\Omega) , \qquad \int_\Omega u^2 \, dx = 1$$

è in $L^\infty(\Omega)$. Allora, per Proposizione 8, abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_d \|\lambda u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{d+2}} \leq C_d \, \lambda^{\frac{d}{d+4}} \, \|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}}$$

e quindi

$$\|u\|_{L^\infty}^{\frac{d}{d+4}} \leq C_d \, \lambda^{\frac{d}{d+4}}.$$